

SCUOLA SUPERIORE DI CATANIA

CONCORSO DI AMMISSIONE AL I ANNO
DEI CORSI ORDINARI DI PRIMO LIVELLO
E A CICLO UNICO A.A. 2025-2026

CLASSE DELLE SCIENZE SPERIMENTALI PROVA DI MATEMATICA E LOGICA (b)

(Corsi di Laurea *diversi* da Matematica, Fisica, Informatica e Ingegneria)

1. Dire se $2^{2025} + 1$ è divisibile per 3.

Soluzione. Se proviamo a calcolare $2^n + 1$ per piccoli valori di n otteniamo: $2^1 + 1 = 3$, $2^2 + 1 = 5$, $2^3 + 1 = 9$, $2^4 + 1 = 17$, $2^5 + 1 = 33$. Ci viene il sospetto che quando n è dispari, e quindi in particolare quando $n = 2025$ il numero $2^n + 1$ sia divisibile per 3.

Lo possiamo dimostrare osservando che

$$2^{n+2} + 1 = 4 \cdot 2^n + 1 = 3 \cdot 2^n + (2^n + 1)$$

e dunque se $2^n + 1$ è divisibile per 3 anche $2^{n+2} + 1$ lo è. Essendo $2^1 + 1 = 3$ divisibile per 3 la tesi è dimostrata.

Conoscendo le *congruenze* la risposta è immediata. Visto che 2 è congruo a -1 modulo 3, allora 2^{2025} è congruo a $(-1)^{2025} = -1$ modulo 3. Sommando 1 si ottiene 0 che significa che $2^{2025} + 1$ è divisibile per 3. \square

2. Calcolare

$$\log_2(1+\frac{1}{2}) + \log_2(1+\frac{1}{3}) + \log_2(1+\frac{1}{4}) + \log_2(1+\frac{1}{5}) + \log_2(1+\frac{1}{6}) + \log_2(1+\frac{1}{7}).$$

Soluzione. Osserviamo che

$$\log_2(1 + \frac{1}{n}) = \log_2(\frac{n+1}{n}) = \log_2(n+1) - \log_2(n).$$

Sommando i sei logaritmi per $n = 1, \dots, 6$ si osserva dunque che c'è cancellazione dei termini intermedi e dunque

$$\log_2(1 + \frac{1}{2}) + \dots + \log_2(1 + \frac{1}{7}) = -\log_2(2) + \log_2(8) = 3 - 1 = 2.$$

\square

3. Sia ABC un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza γ . Sia T un punto sull'arco AB di γ che non contiene C . Mostrare che la lunghezza del segmento TC è uguale alla somma delle lunghezze dei segmenti AT e TB ,

Soluzione. Poniamo $\alpha = \hat{TBA}$ (per semplicità identifichiamo un angolo con la sua misura e un segmento con la sua lunghezza). Visto che sono angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco si ha $\hat{TCA} = \hat{TBA}$ e $\hat{TCB} = \hat{TAB}$. Ricordando che la lunghezza di una corda è pari a due volte il raggio per il seno dell'angolo alla circonferenza, si ha che

$$\begin{aligned} AT &= 2R \sin(\alpha), \\ TB &= 2R \sin(60^\circ - \alpha) \\ TC &= 2R \sin(60^\circ + \alpha) \end{aligned}$$

e osservando che

$$\begin{aligned} \sin(60^\circ - \alpha) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\alpha) - \frac{1}{2} \sin(\alpha) \\ \sin(60^\circ + \alpha) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\alpha) + \frac{1}{2} \sin(\alpha) \end{aligned}$$

si ottiene

$$\sin(60^\circ + \alpha) = \sin(60^\circ - \alpha) + \sin(\alpha)$$

da cui la tesi

$$TC = AT + TB.$$

In alternativa la dimostrazione è immediata se si applica il teorema di Tolomeo (per i quadrilateri ciclici il prodotto delle diagonali è uguale alla somma dei prodotti dei lati opposti) al quadrilatero $ATCB$. \square

4. In un mazzo di 52 carte mescolate qual è la probabilità che la carta successiva al due di cuori sia il tre di cuori?

Soluzione. Per mescolare un mazzo di 52 carte si può procedere come segue: togliamo il tre di cuori dal mazzo, mescoliamo le 51 carte rimanenti e poi inseriamo il tre di cuori in una delle 52 posizioni possibili (prima della prima carta, tra la prima e la seconda, \dots , dopo l'ultima carta). La probabilità che il tre di cuori venga inserito nella posizione consecutiva al due di cuori è dunque $\frac{1}{52}$. \square